

03-04 Représentations matricielles

Définition

On se place dans le plan muni du repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

Soit f une fonction qui, à tout point $M(x ; y)$ du plan, associe un point $M'(x' ; y')$.

On appelle **matrice de la transformation f** la matrice carrée A d'ordre 2 telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exemples

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la symétrie d'axe (Ox) . $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$: homothétie de centre O et de rapport 2.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la symétrie de centre O . $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: symétrie d'axe d'équation $y = x$.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice de la symétrie d'axe (Oy) . $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$: rotation directe de centre O et d'angle $\pi/2$.

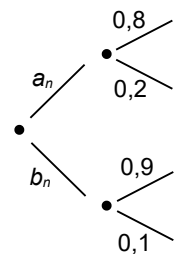
Définition

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies par récurrence et vérifiant $a_n + b_n = 1$ pour tout entier naturel n .

On appelle **matrice de transition** la matrice carrée A telle que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Exemple

La matrice de transition $T = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,9 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ correspond à l'arbre de probabilité ci-contre :



Définition

Soit une suite (U_n) de matrices colonnes définie par son premier terme U_0 et par la relation de récurrence suivante : $U_{n+1} = AU_n + C$ où A est une matrice carrée et C une matrice colonne.

On appelle **état stable** de la suite (U_n) une matrice colonne S telle que $S = AS + C$.

Exemple

En prenant $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \\ -4 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ on obtient l'état stable $S = \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Propriété

Lorsque la matrice $I - A$ est inversible alors un état stable est obtenu avec $(I - A)^{-1}C$.

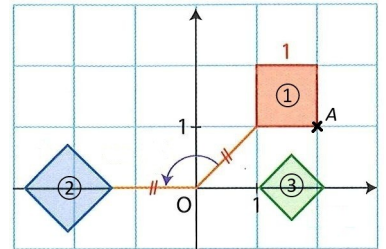
03-04 Applications du cours

Application 1

On admet que la matrice $T = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation directe de centre O et d'angle θ .

On considère les trois carrés ci-contre nommés ①, ② et ③ et le point $A(2;1)$.

- Utiliser le calcul matriciel pour déterminer l'image A' du point A par la rotation transformant le carré ① en le carré ②.
- Le carré vert a pour côté 0,75. Écrire la matrice de l'homothétie transformant le carré ② en le carré ③.
- Écrire la matrice de la transformation permettant de passer directement du carré ① au carré ③.
 - Calculer les coordonnées de l'image A'' de A par cette transformation.



Application 2

Hélène se rend tous les jours au travail en voiture ou à vélo. Le jour 1, Hélène se rend au travail à vélo.

Pour tout entier naturel n non nul, on note a_n la probabilité que Hélène prenne sa voiture le jour n pour se rendre au travail et b_n la probabilité qu'elle prenne son vélo.

Quand Hélène prend son vélo, elle le reprendra le lendemain avec une probabilité de 0,7.

Quand elle prend sa voiture, elle la reprendra le lendemain avec une probabilité de 0,5.

- Soit (L_n) la suite de matrices colonnes $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n non nul. Préciser L_1 .
- Déterminer la matrice de transition T de cette situation telle que $L_{n+1} = TL_n$.
- À l'aide de la calculatrice, émettre une conjecture concernant les puissances de T .

Quelle interprétation peut-on en faire dans le cadre du problème ?

Application 3

Des scientifiques modélisent la prédation entre une population de mouches et de poissons en milieu fermé.

Pour tout entier naturel n : $\begin{cases} P_{n+1} = 0,7 P_n + 0,6 M_n \\ M_{n+1} = -0,2 P_n + 1,5 M_n \end{cases}$ où P_n et M_n désignent les nombres respectifs de poissons

et de dizaines de mouches au jour n . On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} P_n \\ M_n \end{pmatrix}$.

Chaque jour, les scientifiques retirent 10 mouches du milieu fermé.

- Montrer que pour tout entier naturel n on a $U_{n+1} = AU_n + C$ avec A et C des matrices que l'on précisera.
- Après avoir justifié son existence, déterminer l'état stable de la suite (U_n) puis interpréter ce résultat.